Отсюда запишем $x_n = x_{n-1} + \alpha A^2\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(x^* - x_{n-1}\right)$.

Последнее равенство разобьём на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha\left(E + \alpha A^2\right)^{-1} A^2 P(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A^2\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\Pi(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A^2\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A^2\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right),$$

так как $x^* \in M(A)$.

Обозначим через $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + \alpha A^2\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right)$$

получим $w_n = w_{n-1} - \alpha A^2\left(E + \alpha A^2\right)^{-1} w_{n-1}$.

Следовательно, $w_n = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1} w_{n-1} = \ = \left(E + \alpha A^2\right)^{-n} w_0$. А так как $\alpha > 0$, то справедливо:

$$\|w_n\| = \left\|\left(E + \alpha A^2\right)^{-n} w_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|} \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n}\, dE_\lambda w_0\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0} \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n}\, dE_\lambda w_0\right\| +$$
$$+ \left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n}\, dE_\lambda w_0\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda w_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda w_0\right\| \le$$
$$\le \left\|E_{\varepsilon_0} w_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\|w_0\| < \varepsilon$$

при $n \to \infty$, $\varepsilon_0 \to 0$ и, следовательно, $w_n \to 0$, $n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема доказана.

Замечание. *Так как у нас* $x_0 = 0$, *то* $x_n \to x^*$, *т.е. итерационный процесс* (2) *сходится к решению с минимальной нормой.*

Литература

1. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichun-gen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, N 2. – P. 166-176.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Панасик Д.А., Рыбачук Г.Г.
Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, Брест

Необходимость решения систем линейных и нелинейных уравнений на ЭВМ существует давно. Среди задач вычислительной математики, требующих решения СЛАУ, различают собственно задачи на решение СЛАУ, а также практически все нелинейные задачи, решаемые итерационными методами, которые сводятся к последовательному решению СЛАУ на каждом шаге вычислительного процесса. Поэтому математики всегда стремились к наиболее эффективному решению одного из основных модулей вычислительной математики – решению СЛАУ (минимизировать количество затраченного времени на решение системы, обрабатывать матрицы наибольшей размерности, достигать наилучшей численной устойчивости матриц, получать решение с наиболее высокой точностью).

Среди методов решения СЛАУ различают прямые и итерационные. Вначале рассмотрим прямые методы, которые позволяют получить решение с некоторой точностью за определенное количество итераций.

В зависимости от вида СЛАУ (хорошо обусловленные системы, слабо заполненные матрицы) для их решения можно применять различные методы (метод Гаусса, метод оптимального исключения, метод окаймления, метод отражений, метод вращений, метод ортогонализации, метод Жордано, метод прогонки, метод квадратного корня).

В качестве исследуемых методов были выбраны стандартный метод решения систем линейных уравнений — метод Гаусса и его различные модификации: с выбором главного элемента по столбцу и по всей матрице, и пробный метод, в качестве экспериментального, который назовем “клеточным методом”.

Идея “клеточного метода” состоит в том, чтобы исходную матрицу представить в виде матрицы матриц, с целью уменьшения размерности исходной матрицы для решения на ЭВМ. Основной подход – выяснить, в чем отличия метода Гаусса и “клеточного метода”, выяснить плюсы и минусы соответствующих методов.

Исходная квадратная матрица делится на клетки. (Деление на клетки возможно делать различными способами, но для удобства реализации нами клетки выбраны все одинаковой размерности). В результате такого деления мы получим матрицу, в роли элементов которой выступают матрицы. Для дальнейшего решения мы представляем эту матрицу в качестве произведения треугольных матриц (нижней и верхней), используя формулы LU-разложения. С помощью полученных треугольных матриц мы находим вектор-решение данной системы линейных уравнений.

Как экспериментальный вариант, был реализован метод, применяющий разбиение исходной матрицы на матрицы размерности 5х5 (возможен вариант, в конкретном случае применить разбиение на 5, 10 и т.д.). Для решения данной СЛАУ применялся метод LU- разложения (видоизмененный его вариант, где в качестве клеток выступают матрицы), как более эффективный метод для приведения исходной матрицы к двум трехдиагональным матрицам. В результате нахождения таких матриц L и U, необходимо было находить обратную матрицу (использовался метод Гаусса), что, возможно, внесло погрешность в полученный результат.

В результате проведенной работы получены следующие результаты.

Рассматривались матрицы размерности 1000х1000, элементы которых вносились случайным образом. Эксперимент проводился на ЭВМ со следующими характеристиками: тактовая частота 1700 МГц, ОП 256 Мб.

При решении методом Гаусса на решение СЛАУ такой размерности было затрачено около 18 сек; модификацией с выбором главного элемента по столбцу - 20 сек и по всей матрице 38 сек соответственно, что заметно меньше, чем при использовании «клеточного метода» (55 сек). Подобный эффект будет лишь усилен при рассмотрении матриц большей размерности. На данный момент при достаточно быстром развитии ЭВМ и большой размерности оперативной памяти нам легче и быстрее оперировать методом Гаусса при решении СЛАУ. Хотя долгое время считалось, что разбиение матрицы на клетки позволяет увеличить размерность решаемых СЛАУ и уменьшить время решения. Наш результат не совсем согласуется с общепринятым мнением. Возможно это связано с большим числом процедур и обращений к матрице в «клеточном методе», возможно, что некоторые процедуры не идеальны.

Перейдем к рассмотрению итерационных методов решения СЛАУ.

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений:

$$Ax=b, \tag{1}$$

где $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ - n x n- матрица, а $x=(x_1,x_2...x_n)^T$ и $b=(b_1,b_2...b_n)^T$ - n-мерные векторы-столбцы. Система может быть преобразована к виду:

$$x=Bx+c, \tag{2}$$

где x тот же вектор неизвестных, а B и c – некоторые новые матрица и вектор соответственно.

Далее, если определить итерационный процесс следующим образом:

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c, k=0,1,2... \tag{3}$$

начинающийся с некоторого вектора $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)}...x_n^{(0)})^T$, то этот процесс называют методом простой итерации.

Под методом Зейделя понимают такое видоизменение метода простых итераций (3) решения СЛАУ, приведённых к виду (2), при котором для подсчёта i-й компоненты (k+1)-го приближения к искомому вектору x^* используются уже найденные на этом, т.е. (k+1)-м шаге, новые значения первых i-1 компонент. Метод Зейделя определяет процесс вида:

$$x^{(k+1)}=Lx^{(k+1)}+Dx^{(k+1)}+Rx^{(k)}+c, \tag{4}$$

где $B=L+D+R$, а D – диагональная, L и R – соответственно левая и правая треугольные матрицы.

Также рассматривают одно обобщение метода Зейделя, где вместо процесса (4) принимают процесс следующего вида (метод релаксации):

$$x^{(k+1)}=(1-\omega)x^{(k)}+\omega B_1x^{(k+1)}+\omega B_2x^{(k)}+\omega c, \tag{5}$$

где $B=B_1+B_2$, а B_1- строго нижняя треугольная (с нулевой диагональю), B_2 - верхняя треугольная матрицы, ω - параметр релаксации.

Для сравнительной характеристики рассматривался ещё один метод для решения СЛАУ, который будем называть модификацией α-метода. В соответствии с этим имеем следующий процесс:

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\beta_k\frac{A^T\left(Ax^{(k)}-b\right)\left\|Ax^{(k)}-b\right\|^2}{\left(A^T\left(Ax^{(k)}-b\right),A^T\left(Ax^{(k)}-b\right)\right)}, \tag{6}$$

где
$$\beta_{k+1}=\min\left(1,\frac{\beta_k\left\|Ax^{(k)}-b\right\|^2}{\left\|Ax^{(k+1)}-b\right\|^2}\right), \tag{7}$$

A^T - транспонированная матрица относительно матрицы A.

Вычислительный эксперимент и его обсуждение

Нами были рассмотрены системы двух видов: произвольная матрица и матрица с диагональным преобладанием (т.е. матрица, для которой выполняется следующее условие: $|a_{ii}| \geq \sum\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, i = \overline{1,n}$).

Размерность этих систем была n=10,20,40. В качестве исходного вектора брался случайный вектор, и на этом векторе тестировались различные методы. Останов производился по соседним приближениям, то есть $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon,$ где $0 < \varepsilon << 1.$

В соответствии с вычислительным экспериментом может быть сделан следующий вывод: для матрицы с диагональным преобладанием более эффективными оказались метод Зейделя и метод релаксации. Метод релаксации заметно более быстрый по сравнению с методом Зейделя на модели, где матрица имеет симметрический вид. Однако недостаток метода релаксации состоит в том, что выбор параметра релаксации является довольно трудной задачей, которая решается экспериментальным путём.

Для матрицы произвольного вида единственным эффективным методом оказался α-метод, который сходится, но не самым быстрым образом. Возможно, это связано с выбором шаговой длины по формуле (7).

Для системы уравнений размерности n=10, при $\varepsilon = 10^{-5}$, $\beta = 10^{-2}$, ω=1.2, начальном приближении из отрезка [-10,10], приведем полученный результат, где число в таблице – количество итераций.

Матрица / Метод	Симметричная	Несимметричная с диагональным преобладания	Произвольная
Зейделя	13	9	Расходится
Релаксации	12	21	Расходится
Простой итерации	22	13	Расходится
α - метод	1569	1641	6000

Литература

1. Вержбицкий,В.М. Основы численных методов/В.М. Вержбицкий. – М.:Высшая школа,2005. – с.52-132

2. Бахвалов,Н.С. Численные методы./Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.:Наука,1987. – 630с.

3. Богачев,К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений./К.Ю. Богачев – М.:Изд-во МГУ им.Ломоносова,1998. – 79с.